

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
природоподобных, плазменных и
ядерных технологий им. И.В.
Курчатова**

Т.Е. Григорьев

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Спектральная теория линейных операторов
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова Кафедра математики и математических методов физики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: В.Е. Назайкинский, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании Кафедры математики и математических методов физики 31.03.2025

Аннотация

Целью дисциплины является формирование подходов к выполнению студентами исследований в области спектральной теории линейных операторов в рамках выпускных работ на степень бакалавра.

В процессе освоения дисциплины студенты осваивают следующие разделы:

Неограниченные операторы. Сопряжённые операторы. Симметрические и самосопряженные операторы. Нормальные операторы, свойства. Некоммутирующие операторы. Дифференцирование в операторной алгебре. Некоммутативный анализ. Спектральная теория.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- освоение студентами фундаментальных знаний в области спектральной теории линейных операторов, а также методов их практического применения.

Задачи дисциплины

- формирование базовых знаний в области спектральной теории линейных операторов;
- обучение студентов методам практического применения спектральной теории линейных операторов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ПК-1 Способен планировать и проводить научные эксперименты (в избранной предметной области) и (или) теоретические (аналитические и имитационные) исследования	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями современной физики
	ПК-1.2 Имеет глубокое знание и понимание базовых математических дисциплин
	ПК-1.3 Владеет культурой постановки научной задачи и моделирования естественнонаучных объектов и систем
	ПК-1.4 Умеет строить математические модели для описания и исследования процессов и явлений в соответствующих научных областях
	ПК-1.6 Знает основные правила поведения и работы в современной научной лаборатории
ПК-2 Способен анализировать полученные в ходе научно-исследовательской работы данные и делать научные выводы (заключения)	ПК-2.1 Владеет методами статистической обработки и анализа научных данных
	ПК-2.2 Умеет находить ключевые параметры, определяющие изучаемое явление, и производить численные оценки по порядку величины
	ПК-2.3 Способен представлять научные утверждения, их обоснования и доказательства, научные проблемы и их решения ясно и точно в терминах, понятных для профессиональной аудитории, в письменной и устной форме
ПК-3 Способен выбирать и применять подходящее оборудование, инструменты и методы исследований для решения задач в	ПК-3.1 Знает принципы работы и диапазоны рабочих параметров используемого научного оборудования
	ПК-3.2 Знает области и критерии применимости используемых теоретических подходов и умение оценивать точность приближенных аналитических методов вычислений

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные определения, касающиеся неограниченных операторов, их спектра, резольвентного множества, резольвенты;
- теорему о спектральном разложении неограниченного самосопряженного оператора;
- теорему об отображении спектра.

уметь:

- находить спектр простейших обыкновенных дифференциальных операторов;
- описывать самосопряженные расширения симметрических дифференциальных операторов с помощью граничных условий.

владеть:

- методами построения самосопряженных расширений;
- методами функционального исчисления самосопряженных операторов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий**

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Неограниченные операторы.	4	1		5
2	Сопряжённый оператор.	3	3		5
3	Симметрические и самосопряженные операторы.	4	3		9
4	Нормальные операторы, свойства.	4	2		9
5	Некоммутирующие операторы.	2	2		5
6	Дифференцирование в операторной алгебре.	2	1		6
7	Некоммутативный анализ.	2	1		6
8	Функциональное исчисление.	5	1		6
9	Функциональное исчисление.	4	1		9
Итого часов		30	15		60
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Неограниченные операторы.

Замкнутые операторы: график, замыкаемость, замкнутость. Теорема о замкнутом графике. Теорема Крейна-Красносельского. Спектр и резольвентное множество неограниченных операторов. Классификация частей спектра.

2. Сопряжённый оператор.

Замыкаемость и плотная определенность сопряженного оператора. Резольвента и ее свойства. Операторы с компактной резольвентой.

3. Симметрические и самосопряженные операторы.

Поле регулярности симметрического оператора. Теорема Хеллингера-Тёплица. Критерий самосопряженности.

4. Нормальные операторы, свойства.

Преобразование Кэли. Самосопряженные расширения и их описание по фон Нейману. Операторы вида T^*T .

5. Некоммутирующие операторы.

Функции некоммутирующих операторов, генераторы, индексы Фейнмана, свойства. Регулярные представления алгебры операторов.

6. Дифференцирование в операторной алгебре.

Формула дифференцирования сложной функции. Закон умножения, группы Ли в экспоненциальных координатах (Формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа).

7. Некоммутативный анализ.

Функции от унитарных операторов, их свойства. Ограниченные борелевские функции от самосопряженных операторов, их свойства. Ортогональные проекторы, их свойства. Спектральная мера. Скалярные меры, порожденные спектральной мерой, их свойства. Интеграл по спектральной мере от ограниченных функций, свойства. Интеграл по спектральной мере от неограниченных функций, область определения интеграла-оператора. Спектральные теоремы для самосопряженных и унитарных операторов.

8. Функциональное исчисление.

Функции от унитарных операторов, их свойства. Ограниченные борелевские функции от самосопряженных операторов, их свойства. Ортогональные проекторы, их свойства. Спектральная мера. Скалярные меры, порожденные спектральной мерой, их свойства. Интеграл по спектральной мере от ограниченных функций, свойства. Интеграл по спектральной мере от неограниченных функций, область определения интеграла-оператора. Спектральные теоремы для самосопряженных и унитарных операторов.

9. Функциональное исчисление.

Экспонента от неограниченного самосопряженного оператора, свойства. Теорема Стоуна о сильно непрерывной однопараметрической унитарной группе. Теорема фон Неймана: достаточное условие сильной непрерывности однопараметрической унитарной группы. Генераторы однопараметрических полугрупп. Теорема Хилле-Филлипса-Иосиды.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Теория операторов [Текст] : учебник для вузов: рек. М-вом образования РФ / В. А. Садовничий .— 4-е изд. испр. и доп. — М : Дрофа, 2001 .— 384с.
2. Спектральная теория дифференциальных операторов [Текст], самосопряженные дифференциальные операторы/В. А. Ильин, -М., Наука, 1991
3. Методы современной математической физики [Текст] : [в 4 т.] : [учеб. пособие для вузов]. Т. 1. Функциональный анализ / М. Рид, Б. Саймон ; пер. с англ. А. К. Погребкова, В. Н. Сушко ; под ред. М. К. Поливанова ; предисл. Н. Н. Боголюбова .— М. : Мир, 1977 .— 358 с.
4. Методы современной математической физики [Текст] : [в 4 т.] : [учеб. пособие для вузов]. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность / М. Рид, Б. Саймон ; пер. с англ. А. К. Погребкова, В. Н. Сушко ; под ред. М. К. Поливанова .— М. : Мир, 1978 .— 395 с.

Фонд литературы кафедры

- 5) М. Ш. Бирман, М.З. Соломяк, Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовых пространствах, 1980.
- 6) В. Е. Назайкинский, Б.Ю. Стернин, В.Е. Шаталов, Методы некоммутативного анализа, 2002.
- 7) А. Г. Сергеев, Лекции по функциональному анализу, Лекц. курсы НОЦ, 2014.

Дополнительная литература

1. Операторные методы [Текст] : учеб. руководство для вузов по спец. "Прикладная математика" / В. П. Маслов .— М. : Наука, 1973 .— 543 с.

Фонд литературы кафедры

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://lib.mipt.ru> – электронная библиотека Физтеха.
2. <http://www.Sci-lib.com> – Большая научная библиотека.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях демонстрируются презентации с помощью мультимедийных технологий.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Для успешного освоения курса требуется посещение лекций и семинаров. Студенты, успешно работающие на семинарах, допускаются к сдаче экзамена по дисциплине.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра математики и математических методов физики
курс:	<u>4</u>
квалификация:	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Экзамен	
Разработчик:	В.Е. Назайкинский, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ПК-1 Способен планировать и проводить научные эксперименты (в избранной предметной области) и (или) теоретические (аналитические и имитационные) исследования	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями современной физики
	ПК-1.2 Имеет глубокое знание и понимание базовых математических дисциплин
	ПК-1.3 Владеет культурой постановки научной задачи и моделирования естественнонаучных объектов и систем
	ПК-1.4 Умеет строить математические модели для описания и исследования процессов и явлений в соответствующих научных областях
	ПК-1.6 Знает основные правила поведения и работы в современной научной лаборатории
ПК-2 Способен анализировать полученные в ходе научно-исследовательской работы данные и делать научные выводы (заключения)	ПК-2.1 Владеет методами статистической обработки и анализа научных данных
	ПК-2.2 Умеет находить ключевые параметры, определяющие изучаемое явление, и производить численные оценки по порядку величины
	ПК-2.3 Способен представлять научные утверждения, их обоснования и доказательства, научные проблемы и их решения ясно и точно в терминах, понятных для профессиональной аудитории, в письменной и устной форме
ПК-3 Способен выбирать и применять подходящее оборудование, инструменты и методы исследований для решения задач в избранной предметной области	ПК-3.1 Знает принципы работы и диапазоны рабочих параметров используемого научного оборудования
	ПК-3.2 Знает области и критерии применимости используемых теоретических подходов и умение оценивать точность приближенных аналитических методов вычислений
	ПК-3.3 Умеет производить оценку точности численных методов, используемых на ЭВМ, вычислительной сложности используемых алгоритмов и объема требуемых вычислительных ресурсов

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Спектральная теория линейных операторов» обучающийся должен:

знать:

- основные определения, касающиеся неограниченных операторов, их спектра, резольвентного множества, резольвенты;
- теорему о спектральном разложении неограниченного самосопряженного оператора;
- теорему об отображении спектра.

уметь:

- находить спектр простейших обыкновенных дифференциальных операторов;
- описывать самосопряженные расширения симметрических дифференциальных операторов с помощью граничных условий.

владеть:

- методами построения самосопряженных расширений;
- методами функционального исчисления самосопряженных операторов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В целях текущего контроля успеваемости предусмотрен краткий опрос по темам предыдущих занятий по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

- 1) Неограниченные операторы. Область определения. График. Плотная определенность, замыкаемость, замкнутость.
- 2) Сопряжённый оператор. Замыкаемость и плотная определенность сопряженного оператора.
- 3) Теорема о замкнутом графике.
- 4) Теорема Крейна-Красносельского
- 5) Спектр и резольвентное множество неограниченных операторов. Классификация частей спектра.
- 6) Резольвента и ее свойства. Операторы с компактной резольвентой.
- 7) Симметрические и самосопряженные операторы. Поле регулярности симметрического оператора. Теорема Хеллингера-Тёплица.
- 8) Критерий самосопряженности.
- 9) Преобразование Кэли. Самосопряженные расширения и их описание по фон Нейману.
- 10) Операторы вида T^*T . Нормальные операторы, свойства, примеры.
- 11) Функции некоммутирующих операторов, генераторы, индексы Фейнмана, свойства (раздвигание индексов, выделение линейного множителя).
- 12) Регулярные представления алгебры операторов на себе, свойства.
- 13) Дифференцирование в операторной алгебре. Формула дифференцирования сложной функции.
- 14) Закон умножения группы Ли в экспоненциальных координатах (Формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа).
- 15) Т-экспонента. Замкнутая формула для логарифма Т-экспоненты.
- 16) Разложения высоких порядков в некоммутативном анализе. Формулы Ньютона и Тейлора.
- 17) Формула перестановки фейнмановских номеров.
- 18) Формула композиции и формула сложной функции для псевдодифференциальных операторов.
- 19) Функции от унитарных операторов, их свойства.
- 20) Спектральная теорема в терминах умножения для унитарных операторов.
- 21) Преобразование Кэли. Спектральная теорема в терминах умножения для самосопряженных операторов.
- 22) Ограниченные борелевские функции от самосопряженных операторов, их свойства.
- 23) Ортогональные проекторы, их свойства. Спектральная мера. Скалярные меры, порожденные спектральной мерой, их свойства.
- 24) Интеграл по спектральной мере от ограниченных функций, свойства.
- 25) Интеграл по спектральной мере от неограниченных функций, область определения интеграла-оператора.
- 26) Спектральная теорема для унитарных операторов в терминах спектральной меры.
- 27) Спектральная теорема для самосопряженных операторов в терминах спектральной меры.
- 28) Экспонента от неограниченного самосопряженного оператора, свойства.
- 29) Теорема Стоуна о сильно непрерывной однопараметрической унитарной группе.
- 30) Теорема фон Неймана: достаточное условие сильной непрерывности однопараметрической унитарной группы.
- 31) Генераторы однопараметрических полугрупп. Теорема Хилле-Филлипса-Иосиды.

Примеры билетов:

Билет №1

1. Ограниченные борелевские функции от самосопряженных операторов, их свойства.
2. Спектр и резольвентное множество неограниченных операторов. Классификация частей спектра.

Билет № 2

1. Сопряжённый оператор. Замыкаемость и плотная определенность сопряженного оператора.
2. Ортогональные проекторы, их свойства. Спектральная мера. Скалярные меры, порожденные спектральной мерой, их свойства.

Критерии оценивания

Оценка "отлично" (10 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (9 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (8 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочётами.

Оценка "хорошо" (7 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка "хорошо" (6 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка "хорошо" (5 баллов) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка "удовлетворительно" (4 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка "удовлетворительно" (3 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка "неудовлетворительно" (2 балла) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка "неудовлетворительно" (1 балл) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении экзамена обучающемуся предоставляется не менее 40 минут на подготовку. Опрос по билету и ответы на дополнительные вопросы не должны превышать двух астрономических часов. По завершении отведенного на опрос времени, экзаменатор должен выставить обучающемуся экзаменационную оценку.